

**PHƯƠNG PHÁP CASIO - VINACAL**  
**BÀI 25. TÍNH NHANH KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN**

**I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG**

**1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng**

- Cho điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$  thì khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$  được tính theo công thức

$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

- Cho điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và đường thẳng  $d: \frac{x-x_N}{a} = \frac{y-y_N}{b} = \frac{z-z_N}{c}$  thì khoảng cách

từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $d$  được tính theo công thức  $d(M; d) = \frac{2 \left| \left[ \overrightarrow{MN}; \vec{u} \right] \right|}{|\vec{u}|}$

Trong đó  $\vec{u}(a; b; c)$  là vectơ chỉ phương của  $d$  và  $N(x_N; y_N; z_N)$  là một điểm thuộc  $d$

**3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau**

- Cho hai đường thẳng chéo nhau  $d: \frac{x-x_M}{a} = \frac{y-y_M}{b} = \frac{z-z_M}{c}$  và

$d': \frac{x-x_{M'}}{a'} = \frac{y-y_{M'}}{b'} = \frac{z-z_{M'}}{c'}$  thì khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau này được tính

theo công thức  $d(d; d') = \frac{\left| \overrightarrow{MN} \cdot \left[ \vec{u}_d; \vec{u}_{d'} \right] \right|}{\left| \left[ \vec{u}_d; \vec{u}_{d'} \right] \right|}$

Trong đó  $\vec{u}(a; b; c)$  là vectơ chỉ phương của  $d$  và  $M(x_M; y_M; z_M)$  là một điểm thuộc  $d$

$\vec{u}(a'; b'; c')$  là vectơ chỉ phương của  $d'$  và  $M'(x_{M'}; y_{M'}; z_{M'})$  là một điểm thuộc  $d'$

**4. Lệnh Caso**

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

**II) VÍ DỤ MINH HỌA**

**VD1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho mặt phẳng  $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$  và điểm  $A(1; -2; 3)$ . Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến mặt phẳng  $(P)$

A.  $d = \frac{5}{9}$       B.  $d = \frac{5}{29}$       C.  $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$       D.  $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$

**GIẢI**

- Ta nhớ công thức tính khoảng cách từ điểm  $M$  đến mặt phẳng  $(P)$ :

$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Áp dụng cho điểm  $A(1; -2; 3)$  và  $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$  ta sử dụng máy tính để bấm luôn:

$$d(M; (P)) = \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

aqc301+40(p2)+203+4Rs3d+4d+2d=

Handwritten calculator input:  $\frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}}$

⇒ Đáp số chính xác là **C**

**VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]**

Tìm  $m$  để khoảng cách từ  $A(1; 2; 3)$  đến mặt phẳng  $(P): x + 3y + 4z + m = 0$  bằng  $\sqrt{26}$

A.  $m = 7$       B.  $m = 18$       C.  $m = 20$       D.  $m = -45$

**GIẢI**

- Thiết lập phương trình khoảng cách:  $d(A; (P)) = \frac{|1.1 + 3.2 + 4.4 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{26}$

$$\Leftrightarrow \frac{|1.1 + 3.2 + 4.4 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} - \sqrt{26} = 0$$

(việc này ta chỉ làm ở trong đầu)

- Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập vế trái của phương trình vào rồi sử dụng chức năng SHIFT SOLVE.

w1aqc101+302+403+Q) Rs1d+3d+4d\$ps26qr1=

Handwritten calculator input:  $\frac{1+3+4+m}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \sqrt{26}$

Ta thu được kết quả  $m = 7$

⇒ Đáp số chính xác là **A**

**VD3-[Thi thử Sở GD-ĐT tỉnh Hà Tĩnh năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$  và mặt phẳng

$(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$ .  $M$  là điểm có hoành độ âm thuộc  $d$  sao cho khoảng cách từ  $M$  đến  $(P)$  bằng 2. Tọa độ điểm  $M$  là:

A.  $M(-2; 3; 1)$       B.  $M(-1; 5; -7)$       C.  $M(-2; -5; -8)$       D.  $M(-1; -3; -5)$

**GIẢI**

- Ta biết điểm  $M$  thuộc  $(d)$  nên có tọa độ  $M(1+t; -1+2t; -2+3t)$

(biết được điều này sau khi chuyển  $d$  về dạng tham số  $d$ ): 
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$$

➤ Thiết lập phương trình khoảng cách:  $d(M; (P)) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{|t + 2(-1 + 2t) - 2(-2 + 3t) + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2$$

Nghĩ được tới đây thì ta có thể sử dụng Casio để tính rồi. Ta bấm ngắn gọn như sau

Khi đó  $t = -1 \Rightarrow x = -1; y = -3$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

#### VD4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(2; 1; 1)$  và mặt phẳng  $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$ . Biết mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu  $(S)$ .

A.  $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$

B.  $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$

C.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$

D.  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

#### GIẢI

➤ Mặt cầu  $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$  sẽ có tâm  $I(a; b; c)$ . Vì mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(2; 1; 1)$  nên nó chỉ có thể là đáp án **C** hoặc **D**

➤ Ta hiểu: Mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt cầu  $(S)$  theo một giao tuyến là đường tròn bán kính  $r = 1$  sẽ thỏa mãn tính chất  $R^2 = h^2 + r^2$  với  $h$  là khoảng cách từ tâm  $I$  tới mặt phẳng.

Tính tâm  $R^2$  bằng Casio.

$(\text{a} \times \text{c} 2 \text{O} 2 + 1 \text{O} 1 + 2 \text{O} 1 + 2 \text{R} \text{s} 2 \text{d} + 1 \text{d} + 2 \text{d} \text{S} \text{S}) \text{d} + 1 \text{d} =$

$\Rightarrow R^2 = 10$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

#### VD5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$ . Tính khoảng cách từ điểm  $M(-2; 1; -1)$  tới  $d$



Ta dễ dàng tìm được tập nghiệm của  $m$  là  $\{-3; -4; -5; -6; -7\}$   
 $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **A**

**VD7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$  và mặt cầu

$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để  $d$  cắt  $(S)$  tại hai điểm phân biệt?

**A. 5    B. 3    C. 2    D. 1**

**GIẢI**

- Mặt cầu  $(S) : (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$  có tâm  $I(1; -3; 2)$  bán kính  $R = 1$   
 Đường thẳng  $d$  đi qua  $M(2; 1; 0)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u}(1; m; -2)$   
 Ta hiểu : Đường thẳng  $d$  cắt mặt cầu  $(S)$  tại 2 điểm phân biệt nếu khoảng cách từ tâm  $I$  (của mặt cầu  $(S)$ ) đến đường thẳng  $d$  nhỏ hơn bán kính  $R$  (của mặt cầu  $(S)$ )

$$\Leftrightarrow \frac{|\overline{IM}; \vec{u}|}{|\vec{u}|} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} - 1 < 0$$

- Để giải bài toán ta dùng máy tính Casio với tính năng MODE 7 dò nghiệm của bất phương trình :

w7as(8p2Q) d+(4pQ) dRsQ) d+5\$\$p1==p9=10=1=

Ta dễ dàng tìm được tập nghiệm của  $m$  là  $\{-3; -4; -5; -6; -7\}$   
 $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **A**

**VD8-[Câu 68 Sách bài tập hình học nâng cao 12]**

Cho đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(0; 0; 1)$ , có vectơ chỉ phương  $\vec{u}(1; 1; 3)$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  có phương trình  $2x + y - z + 5 = 0$ . Tính khoảng cách giữa  $d$  và  $(\alpha)$

**A.  $\frac{2}{5}$     B.  $\frac{4}{3}$     C.  $\frac{3}{2}$     D.  $\frac{6}{5}$**

**GIẢI**

- Ta thấy :  $\vec{u} \cdot \vec{n}_p = 1.2 + 1.1 + 3.(-1) = 0 \Rightarrow d$  chỉ có thể song song hoặc trùng với  $(\alpha)$

- Khi đó khoảng cách giữa  $d$  và  $(\alpha)$  là khoảng cách từ bất kì 1 điểm  $M$  thuộc  $d$  đến  $(\alpha)$

Ta bấm :

$$aqc0+0p1+5Rs2d+1d+2d=$$

$$\frac{|0+0-1+5|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{4}{3}$$

⇒ Đáp án chính xác là **B**

**VD9-[Câu 92 Sách bài tập hình học nâng cao 12]**

Trong không gian  $Oxyz$  cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2t \\ z=4 \end{cases}$ . Gọi  $\Delta'$  là giao tuyến của 2 mặt

phẳng :  $(P): x-3y+z=0$  và  $(Q): x+y-z+4=0$ . Tính khoảng cách giữa  $\Delta, \Delta'$

- A.  $\frac{12}{\sqrt{15}}$       B.  $\frac{25}{\sqrt{21}}$       C.  $\frac{20}{\sqrt{21}}$       D.  $\frac{16}{\sqrt{15}}$

**GIẢI**

- Đường thẳng  $\Delta'$  có vecto chỉ phương  $\vec{u}' = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (2; 2; 4)$

$$w8111=p3=1=w8211=1=p1=Wq530q54=$$

$$\text{Ans} \left[ \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \right]$$

Và  $\Delta'$  đi qua điểm  $M'(0; 2; 6)$

Đường thẳng  $\Delta$  có vecto chỉ phương  $\vec{u}(1; 2; 0)$  và đi qua điểm  $M(3; -1; 4)$

- Ta hiểu : khoảng cách giữa hai đường thẳng chỉ tồn tại khi chúng song song hoặc chéo nhau

Kiểm tra sự đồng phẳng của 2 đường thẳng trên bằng tích hỗn tạp  $\overline{MM'}[\vec{u}; \vec{u}']$

Nhập ba vecto  $\overline{MM'}, \vec{u}, \vec{u}'$  vào máy tính Casio

$$w811p3=3=2=w8211=2=0=w8312=2=4=$$

$$\text{A} \left[ \begin{matrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \right] \quad \text{B} \left[ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \right]$$

$$\text{C} \left[ \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \right]$$

Xét tích hỗn tạp  $\overline{MM'}[\vec{u}; \vec{u}'] = -40 \neq 0 \Rightarrow \Delta, \Delta'$  chéo nhau

- Tính độ dài hai đường thẳng chéo nhau  $\Rightarrow \Delta, \Delta'$  ta có công thức :

$$d = \frac{|\overline{MM'}[\vec{u}; \vec{u}']|}{|\vec{u}; \vec{u}'|} = 4.3640.. = \frac{20}{\sqrt{21}}$$

$$Wqcp40) Pqcp540q55) =$$

$$\text{Abs}(\text{Vect}A \times \text{Vect}B) \div \dots$$

$$4.364357805$$

⇒ Đáp án chính xác là **C**

**VD9-[Câu 25 Sách bài tập hình học nâng cao 12]**

Cho hai đường thẳng  $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$  và  $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ . Khoảng cách giữa hai đường thẳng  $d, d'$  là:

- A.  $4\sqrt{2}$       B.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$       C.  $\frac{4}{3}$       D.  $2\sqrt{3}$

**GIẢI**

➤ Đường thẳng  $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; 2; 2)$  và đi qua điểm  $M(2; -1; -3)$

Đường thẳng  $d'$  đi qua điểm  $M'(1; 1; -1)$

Để thấy hai đường thẳng  $d, d'$  song song với nhau nên khoảng cách từ  $d'$  đến  $d$  chính là khoảng cách từ điểm  $M'$  (thuộc  $d'$ ) đến  $d$ .

Gọi khoảng cách cần tìm là  $h$  ta có  $h = \frac{|\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1.8856... = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$w811p1=2=2=w8211=2=2=Wqcp530q54) Pqcp54) =$$

$$\text{Abs}(\text{Vect}A \times \text{Vect}B) \div \dots$$

$$1.885618083$$

⇒ Đáp án chính xác là **B**

**VD10-[Câu 26 Sách bài tập hình học nâng cao 12]**

Cho hai đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$  và  $d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}$ . Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng

$d$  và  $d'$  có phương trình:

- A.  $x + 5y + 2z + 12 = 0$       B.  $x + 5y - 2z + 12 = 0$   
 C.  $x - 5y + 2z - 12 = 0$       D.  $x + 5y + 2z - 12 = 0$

**GIẢI**

➤ Đường thẳng  $d$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (1; -1; 2)$  và đi qua điểm  $M(2; 1; 0)$

Đường thẳng  $d'$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u}' = (-2; 0; 1)$  và đi qua điểm  $M'(2; 3; 0)$

Để thấy hai đường thẳng  $d, d'$  chéo nhau nên mặt phẳng  $(P)$  cách đều hai đường thẳng trên khi mặt phẳng đó đi qua trung điểm  $MM'$  và song song với cả 2 đường thẳng đó.

➤ Mặt phẳng  $(P)$  song song với cả 2 đường thẳng nên nhận vectơ chỉ phương của 2 đường thẳng là cặp vectơ chỉ phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_p = [\vec{u}; \vec{u}'] = (-1; -5; -2)$$

$$w8111=p1=2=w821p2=0=1=Wq530q54=$$

$$\text{Ans} \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

- 1

(P) lại đi qua trung điểm  $I(2; 2; 0)$  của  $MM'$  nên (P):  $x + 5y + 2z - 12 = 0$

⇒ Đáp án chính xác là **D**

**Bài 1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm  $I(1; 2; -1)$  và tiếp xúc với mặt phẳng (P):  $x - 2y - 2z - 8 = 0$  ?

A.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$     B.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

C.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$     D.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

**Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]**

Tìm điểm  $M$  trên đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$  sao cho  $AM = \sqrt{6}$  với  $A(0; 2; -2)$ :

A.  $\begin{bmatrix} 1; 1; 0 \\ 2; 1; -1 \end{bmatrix}$     B.  $\begin{bmatrix} 1; 1; 0 \\ -1; 3; -4 \end{bmatrix}$     C.  $\begin{bmatrix} -1; 3; -4 \\ 2; 1; -1 \end{bmatrix}$     D. Không có  $M$  thỏa

**Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]**

Cho (P):  $2x - y + z - m = 0$  và  $A(1; 1; 3)$ . Tìm  $m$  để  $d(A; (P)) = \sqrt{6}$

A.  $\begin{bmatrix} m = -2 \\ m = 4 \end{bmatrix}$     B.  $\begin{bmatrix} m = 3 \\ m = -9 \end{bmatrix}$     C.  $\begin{bmatrix} m = -2 \\ m = 10 \end{bmatrix}$     D.  $\begin{bmatrix} m = -3 \\ m = 12 \end{bmatrix}$

**Bài 4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(-2; 3; 1)$  và  $B(5; -6; -2)$ . Đường thẳng  $AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{MA}{MB}$

A.  $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$     B.  $\frac{MA}{MB} = 2$     C.  $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$     D.  $\frac{MA}{MB} = 3$

**Bài 5-[Câu 67 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tính khoảng cách từ điểm  $M(2; 3; -1)$  đến đường thẳng  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha): x + y - 2z - 1 = 0$  và  $(\alpha'): x + 3y + 2z + 2 = 0$ .

A.  $\sqrt{\frac{215}{24}}$     B.  $\sqrt{\frac{205}{15}}$     C.  $\frac{205}{\sqrt{15}}$     D.  $\frac{215}{\sqrt{24}}$

**Bài 6-[Câu 9 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Cho  $A(1; 1; 3)$ ,  $B(-1; 3; 2)$ ,  $C(-1; 2; 3)$ . Khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  là:

A.  $\sqrt{3}$     B. 3    C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     D.  $\frac{3}{2}$

**Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**



Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$  và  $d': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$

- A.  $\sqrt{\frac{127}{4}}$     B.  $\frac{\sqrt{127}}{4}$     C.  $\sqrt{\frac{386}{3}}$     D.  $\frac{\sqrt{386}}{3}$

**Bài 8-[Câu 69c Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$  và  $d': \begin{cases} x=2-t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$

- A.  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$     B.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$     C.  $\frac{\sqrt{26}}{13}$     D.  $\frac{\sqrt{24}}{11}$

**LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]**

Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm  $I(1;2;-1)$  và tiếp xúc với mặt phẳng  $(P): x-2y-2z-8=0$  ?

- A.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$     B.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$   
 C.  $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$     D.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

**GIẢI**

- Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng  $(P)$  khi  $d(I;(P)) = R$

$d(I;(P)) = \frac{|1-4+2-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$

$$\frac{|1-4+2-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}$$

3

$d(I;(P)) = 3 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow$  Đáp số chỉ có thể là C hoặc D

- Mà ta lại có tâm mặt cầu là  $I(1;2;-1) \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$   
 Vậy đáp số chính xác là **D**

**Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]**

Tìm điểm  $M$  trên đường thẳng  $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$  sao cho  $AM = \sqrt{6}$  với  $A(0;2;-2)$ :

- A.  $\begin{bmatrix} (1;1;0) \\ (2;1;-1) \end{bmatrix}$     B.  $\begin{bmatrix} (1;1;0) \\ (-1;3;-4) \end{bmatrix}$     C.  $\begin{bmatrix} (-1;3;-4) \\ (2;1;-1) \end{bmatrix}$     D. Không có  $M$  thỏa

**GIẢI**

- Gọi điểm  $M$  thuộc  $d$  có tọa độ theo  $t$  là  $M(1+t;1-t;2t)$

- Ta có  $AM = \sqrt{6} \Leftrightarrow |\overline{AM}| = \sqrt{6} \Leftrightarrow |\overline{AM}|^2 - 6 = 0$

Sử dụng máy tính Casio tìm  $t$

$(1+Q) p0) d+ (1pQ) p2) d+ (2Q) +2) dp6qr5=qrp5=$

$$\begin{array}{l} \text{Math} \\ (1+x-0)^2 + (1-x-2)^2 \\ x= \\ L-R= \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Math} \\ (1+x-0)^2 + (1-x-2)^2 \\ x= \\ L-R= \end{array}$$

- Ta tìm được hai giá trị của  $t$   
 Với  $t=0 \Rightarrow M(1;1;0)$ , với  $t=-2 \Rightarrow M(-1;3;-4)$   
 $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **B**

**Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]**

Cho  $(P): 2x - y + z - m = 0$  và  $A(1;1;3)$ . Tìm  $m$  để  $d(A;(P)) = \sqrt{6}$

- A.  $\begin{cases} m = -2 \\ m = 4 \end{cases}$     B.  $\begin{cases} m = 3 \\ m = -9 \end{cases}$     C.  $\begin{cases} m = -2 \\ m = 10 \end{cases}$     D.  $\begin{cases} m = -3 \\ m = 12 \end{cases}$

**GIẢI**

- Thiết lập phương trình khoảng cách  $d(A;(P)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 - 1 + 3 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$
- Đó là khi ta nhầm, nếu vừa nhầm vừa điền luôn vào máy tính thì làm như sau (để tiết kiệm thời gian)

rs2d+1d+1d

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

Tìm nghiệm ta sử dụng chức năng CALC xem giá trị nào của  $m$  làm về trái  $= \sqrt{6}$  thì là đúng

rp2=

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \sqrt{6}$$

$\Rightarrow$  Chỉ có A hoặc C là đúng

r4=

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = 0$$

Giá trị  $m=4$  không thỏa mãn vậy đáp án A sai  $\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **C**

**Bài 4-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(-2;3;1)$  và  $B(5;-6;-2)$ . Đường thẳng

$AB$  cắt mặt phẳng  $(Oxz)$  tại điểm  $M$ . Tính tỉ số  $\frac{MA}{MB}$

- A.  $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$     B.  $\frac{MA}{MB} = 2$     C.  $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$     D.  $\frac{MA}{MB} = 3$

**GIẢI**

- Mặt phẳng  $(Oxz)$  có phương trình  $y=0$

- Để tính tỉ số  $\frac{MA}{MB}$  ta sử dụng công thức tỉ số khoảng cách (đã gặp ở chuyên đề hình học không gian)

Ta có:  $\frac{MA}{MB} = \frac{d(A; (Oxz))}{d(B; (Oxz))}$  bất kể hai điểm  $A, B$  cùng phía hay khác phía so với  $(Oxz)$

Ta có thể dùng máy tính Casio tính ngay tỉ số này

$$\frac{|0+3+0|}{|0+-6+0|} = \frac{1}{2}$$

Ta hiểu cả hai mẫu số của hai phép tính khoảng cách đều như nhau nên ta triệt tiêu luôn mà không cần cho vào phép tính của Casio  
 $\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **A**

**Bài 5-[Câu 67 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tính khoảng cách từ điểm  $M(2; 3; -1)$  đến đường thẳng  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha): x + y - 2z - 1 = 0$  và  $(\alpha'): x + 3y + 2z + 2 = 0$ .

- A.  $\sqrt{\frac{215}{24}}$       B.  $\sqrt{\frac{205}{15}}$       C.  $\frac{205}{\sqrt{15}}$       D.  $\frac{215}{\sqrt{24}}$

**GIẢI**

- $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\alpha')$  nên cùng thuộc 2 mặt phẳng này  $\Rightarrow$  vectơ chỉ phương  $\vec{u}$  của đường thẳng  $d$  vuông góc với cả 2 vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng trên.

$$\Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_{\alpha'}] = (8; -4; 2)$$

$$w8111=1=p2=w8210=3=2=Wq530q54=$$

$$\text{Ans} \left[ \begin{matrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{matrix} \right]$$

2

- Gọi điểm  $N(x; y; 0)$  thuộc đường thẳng  $d \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$

- Khoảng cách từ điểm  $M$  đến đường thẳng  $d$  là:  $h = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 3.8265... = \sqrt{\frac{205}{14}}$

$$w8115P2p2=p3P2p3=0pp1=w8218=p4=2=Wqcq530q54) Pqcq54) =$$

$$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \div \text{V}$$

$$3.826598639$$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

**Bài 6-[Câu 9 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Cho  $A(1; 1; 3)$ ,  $B(-1; 3; 2)$ ,  $C(-1; 2; 3)$ . Khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  là:

A.  $\sqrt{3}$  B. 3 C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  D.  $\frac{3}{2}$

**GIẢI**

- Vecto pháp tuyến của  $(ABC)$  là  $\vec{n} = [\overline{AB}; \overline{AC}] = (1; 2; 2)$

$$w811p2=2=p1=w821p2=1=0=Wq530q54=$$

$$\text{Ans } \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

1

$$\Rightarrow (ABC): 1(x-1) + 2(y-1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 9 = 0$$

- Khoảng cách từ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  là  $h = \frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

**Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$  và  $d': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$

A.  $\sqrt{\frac{127}{4}}$  B.  $\frac{\sqrt{127}}{4}$  C.  $\sqrt{\frac{386}{3}}$  D.  $\frac{\sqrt{386}}{3}$

**GIẢI**

- Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1; -3; 4)$  và có vecto chỉ phương  $(2; 1; -2)$

Đường thẳng  $d'$  đi qua điểm  $M'(-2; 1; -1)$  và có vecto chỉ phương  $(-4; -2; 4)$

Để thấy 2 đường thẳng trên song song với nhau  $\Rightarrow$  Khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ  $M'$  đến  $d$

$$= \frac{|[\overline{M'M}; \vec{u}]|}{|\vec{u}|} = 6.5489... = \frac{\sqrt{386}}{3}$$

$$w811p3=4=p5=w8212=1=p2=Wq530q54)Pq54)=$$

$$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \div \text{p}$$

6.548960901

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

**Bài 7-[Câu 69b Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$  và  $d': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$

A.  $\sqrt{\frac{127}{4}}$  B.  $\frac{\sqrt{127}}{4}$  C.  $\sqrt{\frac{386}{3}}$  D.  $\frac{\sqrt{386}}{3}$

**GIẢI**

- Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1; -3; 4)$  và có vecto chỉ phương  $(2; 1; -2)$

Đường thẳng  $d'$  đi qua điểm  $M'(-2; 1; -1)$  và có vecto chỉ phương  $(-4; -2; 4)$

Để thấy 2 đường thẳng trên song song với nhau  $\Rightarrow$  Khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ  $M'$  đến  $d$

$$= \frac{|\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 6.5489... = \frac{\sqrt{386}}{3}$$

w811p3=4=p5=w8212=1=p2=Wqcg530q54) Pqcg54) =

Abs(VctA×VctB)÷

6.548960901

⇒ Đáp số chính xác là **D**

**Bài 8-[Câu 69c Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng  $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$  và  $d': \begin{cases} x=2-t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$

- A.  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$       B.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{26}}{13}$       D.  $\frac{\sqrt{24}}{11}$

**GIẢI**

- Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1;2;3)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u}(1;2;3)$   
Đường thẳng  $d'$  đi qua điểm  $M'(2;-1;0)$  và có vectơ chỉ phương  $\vec{u}'(-1;1;1)$   
Để thấy 2 đường thẳng trên chéo nhau ⇒ Khoảng cách cần tìm là

$$= \frac{|\overrightarrow{MM'} \cdot [\vec{u}; \vec{u}']|}{|[\vec{u}; \vec{u}']|} = 0.3922... = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

w8111=p3=p3=w8211=2=3=w831p1=1=1=Wqcg53q57 (q540q55) ) Pqcg540q55 ) =

Abs(VctA·(VctB×

0.3922322703

⇒ Đáp số chính xác là **C**