

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL
BÀI 30. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Các khái niệm thường gặp

- Hệ trục thực ảo gồm có 2 trục vuông góc với nhau : Trục nằm ngang là trục thực, trục đứng dọc là trục ảo
- Số phức $z = a + bi$ khi biểu diễn trên hệ trục thực ảo là điểm $M(a; b)$
- Môđun của số phức $z = a + bi$ là độ lớn của vecto \overline{OM}

2. Lệnh Caso

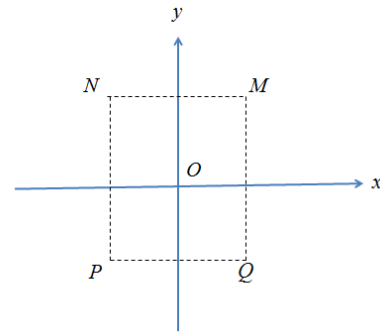
- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3
- Lệnh giải phương trình bậc ba MODE 5 4

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 31 Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3-i$. Hỏi điểm biểu diễn số phức z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q

A. điểm P B. điểm Q C. điểm M D. điểm N



GIẢI

➤ Cô lập $z = \frac{3-i}{1+i}$

Sử dụng máy tính Casio trong môi trường CMPLX để tìm z

$$\frac{3-i}{1+i}$$

$$1-2i$$

⇒ $z = 1 - 2i$ và điểm biểu diễn z trong hệ trục thực ảo có tọa độ $(1; -2)$. Điểm có thực dương và ảo âm sẽ nằm ở góc phần tư thứ IV

⇒ Điểm phải tìm là Q và đáp án chính xác là **B**

VD2-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Điểm biểu diễn số phức $z = 7 + bi$ với $b \in R$, nằm trên đường thẳng có phương trình là :

A. $x = 7$ B. $y = x$ C. $y = x + 7$ D. $y = 7$

GIẢI

➤ Điểm biểu diễn số phức $z = 7 + bi$ là điểm M có tọa độ $M(7; b)$

Ta biết điểm M thuộc đường thẳng d nếu tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình đường thẳng d

➤ Thử đáp án A ta có $x = 7 \Leftrightarrow 1.x + 0.y - 7 = 0$. Thế tọa độ điểm M vào ta được : $1.7 + 0.b - 7 = 0$ (đúng)

Vậy điểm M thuộc đường thẳng $x = 7 \Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

VD3-[Thi thử Group Nhóm toán – Facebook lần 5 năm 2017]

Các điểm M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1 = \frac{4i}{i-1}$; $z_2 = (1-i)(1+2i)$

; $z_3 = -1 + 2i$

GIẢI

➤ Rút gọn z_1 bằng Casio

$$a \ 4 \ b \ R \ b \ p \ 1 \ = \frac{4i}{i-1} = 2-2i$$

Ta được $z_1 = 2 - 2i$ vậy điểm $M(2; -2)$

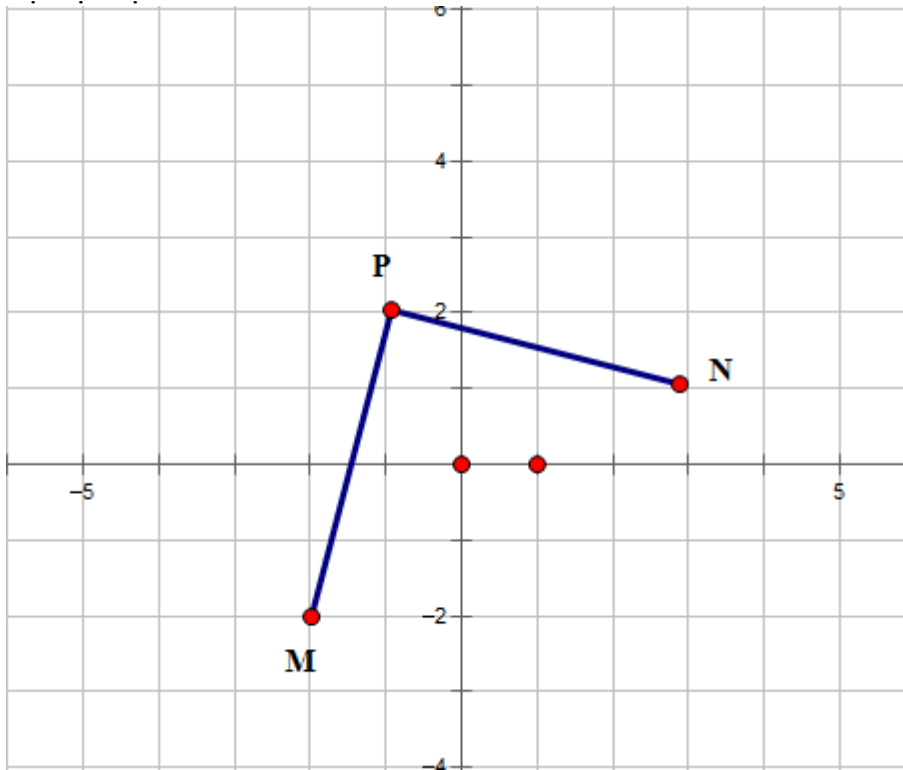
➤ Rút gọn z_2 bằng Casio

$$(1 - i)(1 + 2i) = 3 + i$$

Ta được $z_2 = 3 + i$ vậy điểm $N(3; 1)$

Tương tự $z_3 = -1 + 2i$ và điểm $P(-1; 2)$

➤ Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M, N, P trên hệ trục tọa độ



Để thấy tam giác MNP vuông cân tại $P \Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

VD4-[Thi thử báo Toán học Tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy , gọi các điểm M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức

$z_1 = 1 - i, z_2 = 3 + 2i$. Gọi G là trọng tâm tam giác OMN , với O là gốc tọa độ. Hỏi G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây.

- A. $5 - i$ B. $4 + i$ C. $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i$ D. $2 + \frac{1}{2}i$

GIẢI

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 1 - i \Rightarrow$ tọa độ $M(1; -1)$
Điểm N biểu diễn số phức $z_2 = 3 + 2i \Rightarrow$ tọa độ $N(3; 2)$
Gốc tọa độ $O(0; 0)$

➤ Tọa độ điểm $G\left(\frac{x_M + x_N + x_O}{3}, \frac{y_M + y_N + y_O}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Vậy G là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i \Rightarrow \mathbf{C}$ là đáp án chính xác

VD5-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$, điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$

- A. $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{4}$ B. $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{2}$ C. $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{4}$ D. $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{2}$

GIẢI

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 4i \Rightarrow$ tọa độ $M(3; -4)$
Điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z \Rightarrow$ tọa độ $N\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$a \ 1 \ + \ b \ R \ 2 \ \$ \ O \ (\ 3 \ p \ 4 \ b \) \ =$
CMPLX \square Math \blacktriangle
 $\frac{1+i}{2} \times (3-4i)$
 $\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$

Gốc tọa độ $O(0; 0)$

- Để tính diện tích tam giác OMM' ta ứng dụng tích có hướng của 2 vectơ trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm O, M, M' là xong

$\overline{OM}(3; -4; 0), \overline{OM'}\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left[\left[\overline{OM}; \overline{OM'} \right] \right]$

Tính $\left[\left[\overline{OM}; \overline{OM'} \right] \right]$

$w \ 8 \ 1 \ 1 \ 3 \ = \ p \ 4 \ = \ 0 \ = \ q \ 5 \ 1 \ 2 \ 1 \ 7 \ P \ 2 \ = \ p \ 1$
 $P \ 2 \ = \ 0 \ = \ C \ q \ 5 \ 3 \ q \ 5 \ 7 \ q \ 5 \ 4 \ =$
VCT \square
 $\mathbf{VectA \cdot VectB}$

12.5

Vậy $\left[\left[\overline{OM}; \overline{OM'} \right] \right] = 12.5 = \frac{25}{2} \Rightarrow S_{OMM'} = \frac{1}{2} \left[\left[\overline{OM}; \overline{OM'} \right] \right] = \frac{25}{4}$

$\Rightarrow \mathbf{A}$ là đáp án chính xác

VD6-[Đề thi minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = iz_0$

A. $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ C. $M\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ D. $M\left(\frac{1}{4}; 1\right)$

GIẢI

➤ Sử dụng lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3 để giải phương trình

$$4z^2 - 16z + 17 = 0$$

w 5 3 4 = p 1 6 = 1 7 = = =

$$X_1 =$$

$$2 + \frac{1}{2}i$$

$$X_2 =$$

$$2 - \frac{1}{2}i$$

Vậy phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$ có hai nghiệm $z = 2 + \frac{1}{2}i$ và $z = 2 - \frac{1}{2}i$

➤ Để z_0 có phần ảo dương $\Rightarrow z = 2 - \frac{1}{2}i$. Tính $w = z_0 i$

w 2 (2 + a 1 R 2 \$ b) b =

$$\left(2 + \frac{1}{2}i\right)i$$

$$-\frac{1}{2} + 2i$$

Vậy phương trình $w = -\frac{1}{2} + 2i \Rightarrow$ Điểm biểu diễn số phức w là $M\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

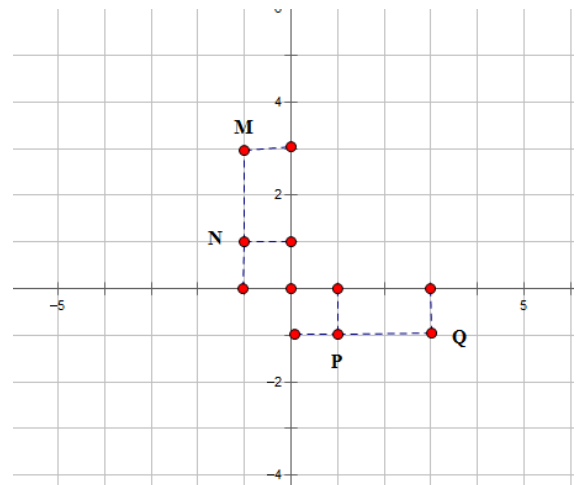
\Rightarrow B là đáp án chính xác

II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z = 2 + i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w = (1 - i)z$.

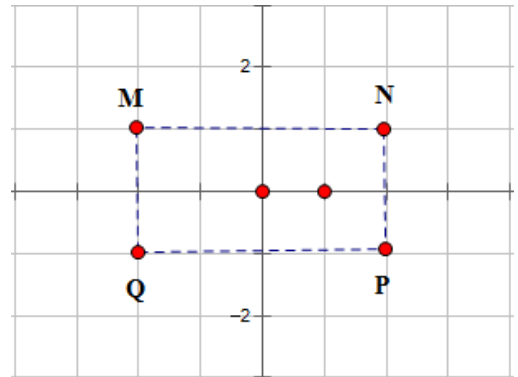
- A. Điểm M B. Điểm N
C. Điểm P D. Điểm Q



Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z = 4z + 5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên.

- A. Điểm N B. Điểm P
C. Điểm M D. Điểm Q



Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{-2-5} + \frac{4}{5}i$,

$(1-i)(1+2i)$, $-2i^3$ Khi đó tam giác ABC

- A. Vuông tại C B. Vuông tại A C. Vuông cân tại B D. Tam giác đều

Bài 4-Các điểm A, B, C, A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

$1-i, 2+3i, 3+i$ và

$3i, 3-2i, 3+2i$ có G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

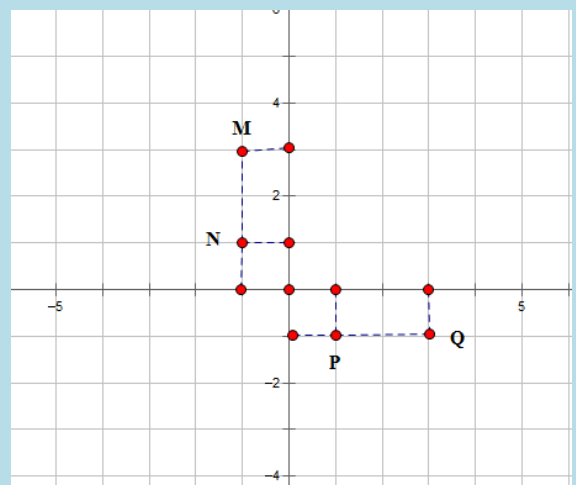
- A. G trùng G' B. Vecto $\overrightarrow{GG'} = (1; -1)$
C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA'}$ D. Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z = 2 + i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w = (1-i)z$

- A. Điểm M B. Điểm N
C. Điểm P D. Điểm Q



GIẢI

- Tính số phức $w = (1-i)z$ bằng máy tính Casio

$$(1-i)(2+i) = 3-i$$

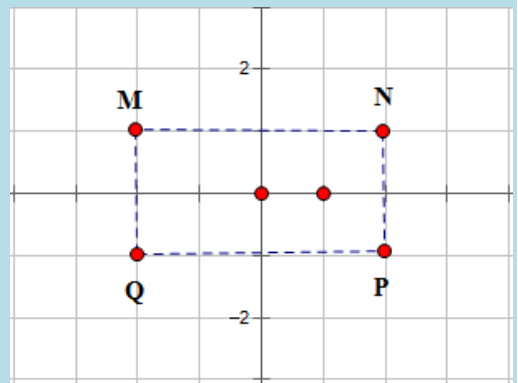
Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức w là $(3; -1)$. Đây là tọa độ điểm Q

⇒ Đáp số chính xác là **D**

Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z = 4z + 5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên.

- A. Điểm N
- B. Điểm P
- C. Điểm M
- D. Điểm Q



GIẢI

- Cô lập $(2-i)z - 4z = 5 \Leftrightarrow -(2+i)z = 5 \Leftrightarrow z = \frac{-5}{2+i}$

- Tìm số phức $z = \frac{-5}{2+i}$

$$\frac{-5}{2+i} = -2+i$$

Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức z là $(-2; 1)$. Đây là tọa độ điểm M

⇒ Đáp số chính xác là **C**

Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{-2 + \frac{4}{5}i}$,

$(1-i)(1+2i)$, $-2i^3$ Khi đó tam giác ABC

- A. Vuông tại C
- B. Vuông tại A
- C. Vuông cân tại B
- D. Tam giác đều

GIẢI

- Rút gọn $\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i}$ được $-2 - 4i$ vậy tọa độ điểm $A(-2; -4)$

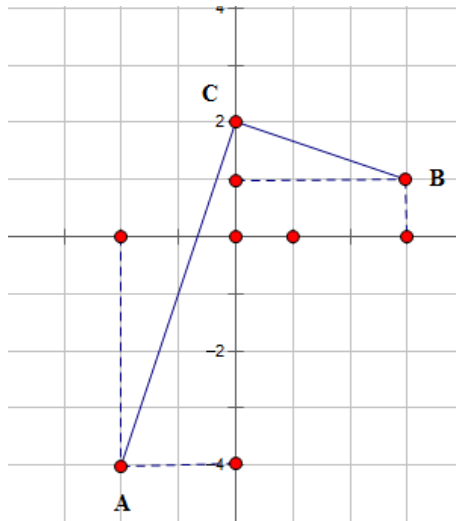
$$a \ 4 \ R \ p \ a \ 2 \ R \ 5 \ \$ + a \ 4 \ R \ 5 \ \$ \ b =$$

$$\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i} = -2 - 4i$$

- Rút gọn $(1-i)(1+2i)$ được $3+i$ vậy tọa độ điểm $B(3;1)$

$$(1-i)(1+2i) = 3+i$$

- Rút gọn $-2i^3 = -2i \cdot i^2 = 2i$ vậy tọa độ điểm $C(0;2)$
- Để phát hiện tính chất của tam giác ABC ta chỉ cần biểu diễn trên hệ trục tọa độ là thấy ngay



Dễ thấy tam giác ABC vuông tại C
 \Rightarrow Đáp số chính xác là **A**

Bài 4. Các điểm A, B, C, A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :
 $1-i, 2+3i, 3+i$ và

$3i, 3-2i, 3+2i$ có G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

- A. G trùng G'
- B. Vecto $\overrightarrow{GG'} = (1; -1)$
- C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA'}$
- D. Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

GIẢI

- Ta có tọa độ các đỉnh $A(1; -1), B(2; 3), C(3; 1) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G(2; 1)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \end{cases}$$

- Ta có tọa độ các đỉnh $A'(0; 3), B'(3; -2), C'(3; 2) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G'(2; 1)$

$$\begin{cases} x_{G'} = \frac{x_{A'} + x_{B'} + x_{C'}}{3} = 2 \\ y_{G'} = \frac{y_{A'} + y_{B'} + y_{C'}}{3} = 1 \end{cases}$$

Rõ ràng $G \equiv G' \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**.