

CHUYÊN ĐỀ 2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

§2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa:

a) Góc giữa hai vectơ:

Cho hai vectơ a và b đều khác 0 . Từ điểm O bất kỳ dựng các vectơ $\vec{OA} = a$ và $\vec{OB} = b$. Số đo góc AOB được gọi là số đo góc giữa hai vectơ a và b .

+ Quy ước: Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì ta xem góc giữa hai vectơ a và b là tùy ý (từ 0° đến 180°).

+ Kí hiệu: $(a; b)$

b) Tích vô hướng của hai vectơ:

Tích vô hướng của hai vectơ a và b là một số thực được xác định bởi: $a \cdot b = |a| |b| \cdot \cos(a, b)$.

2. Tính chất: Với ba vectơ bất kì a, b, c và mọi số thực k ta luôn có:

$$1) a \cdot b = b \cdot a$$

$$2) a(b \pm c) = ab \pm ac$$

$$3) (ka)b = k(ab) = a(kb)$$

$$4) a \cdot 0 = 0, a \cdot a = |a|^2$$

Chú ý: Ta có kết quả sau:

+ Nếu hai vectơ a và b khác 0 thì $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$

+ $a \cdot a = |a|^2$ gọi là bình phương vô hướng của vectơ a .

$$+ (a \pm b)^2 = |a \pm b|^2 = |a|^2 \pm 2ab + |b|^2, (a + b)(a - b) = |a|^2 - |b|^2$$

3. Công thức hình chiếu và phương tích của một điểm với đường tròn.

a) Công thức hình chiếu.

Cho hai vectơ \vec{AB}, \vec{CD} . Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên đường thẳng CD khi đó ta có

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{A'B'} \cdot \vec{CD}$$

b) phương tích của một điểm với đường tròn.

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M . Một đường thẳng qua M cắt đường tròn tại hai điểm A và B . Biểu thức $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ được gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn $(O; R)$. Kí hiệu là $P_{M/(O)}$.

Chú ý: Ta có $P_{M/(O)} = \vec{MA} \cdot \vec{MB} = MO^2 - R^2 = MT^2$ với T là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ điểm M

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho hai vectơ $a = (x_1; y_1)$ và $b = (x_2; y_2)$. Khi đó

$$1) a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$2) |a| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$3) \cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Hệ quả:

Câu 6. Cặp vectơ nào sau đây vuông góc?

A. $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$.

B. $\vec{a} = (3; -4)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$.

C. $\vec{a} = (-2; -3)$ và $\vec{b} = (-6; 4)$.

D. $\vec{a} = (7; -3)$ và $\vec{b} = (3; -7)$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10 \neq 0$ suy ra A sai.

Phương án B: $\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot (-3) + (-4) \cdot 4 \neq 0$ suy ra B sai.

Phương án C: $\vec{a}\vec{b} = -2 \cdot (-6) - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ suy ra C đúng.

Phương án D: $\vec{a}\vec{b} = 7 \cdot 3 + (-3) \cdot (-7) = 42 \neq 0$ suy ra D sai.

Câu 7. Cho 2 vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$, tìm biểu thức sai:

A. $\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

B. $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

C. $\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2} [\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} + \vec{b})^2]$.

D. $\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - \vec{a}^2 - \vec{b}^2]$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A : biểu thức tọa độ tích vô hướng $\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ nên loại A

Phương án B : Công thức tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ nên loại B

Phương án C: $\frac{1}{2} [\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} + \vec{b})^2] = \frac{1}{2} [\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b})] = -\vec{a}\vec{b}$ nên chọn C.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \overline{BC} = 2\overline{BC}$.

B. $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = -2$.

C. $(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = -4$.

D. $(\overline{BC} - \overline{AC}) \cdot \overline{BA} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh về trái với về phải.

Phương án A: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = 2x \Rightarrow (\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \overline{BC} = 2\overline{BC}$ nên loại A.

Phương án B: $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = BC \cdot AC \cos 120^\circ = -2$ nên loại B.

Phương án C: $(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \overline{AC} = 4$, $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$ nên chọn C.

Câu 9. Cho tam giác ABC cân tại A , $A = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overline{BA} \cdot \overline{CA}$

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

D. $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overline{BA} \cdot \overline{CA} = BA \cdot CA \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} a^2$.

Câu 10. Cho ABC là tam giác đều. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$.

B. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -\overline{AC} \cdot \overline{AB}$.

C. $(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \overline{BC} = \overline{AB} (\overline{AC} \cdot \overline{BC})$.

D. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BA} \cdot \overline{BC}$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: Do $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \neq 0$ nên loại A.

Phương án B: $\left. \begin{array}{l} \overline{AB} \cdot \overline{AC} > 0 \\ -\overline{AC} \cdot \overline{AB} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} \neq -\overline{AC} \cdot \overline{AB}$ nên loại B.

Phương án C: Do $(\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \overline{BC}$ và $\overline{AB} (\overline{AC} \cdot \overline{BC})$ không cùng phương nên loại C.

Phương án D: $AB = AC = BC = a$, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2}{2}$ nên chọn D.

Câu 11. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$. Tính $\cos A$

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overline{AB} = (-2; -1)$, $\overline{AC} = (4; -3)$ suy ra

$$\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{(-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{25}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$. B. $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AC}$.
C. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}$. D. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ suy ra $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$ nên loại A.

Phương án B: $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = 0$ và $\frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AC} = 0$ suy ra $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AC} = 0$ nên loại B.

Phương án C: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = AB \cdot AB \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$.

$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = AB \cdot DC \cdot \cos 180^\circ = -AB^2 \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} \neq \overline{AB} \cdot \overline{CD}$ nên chọn C.

Câu 13. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1;-1)$, $B(3;1)$, $C(6;0)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $\overline{AB} = (-4;-2)$, $\overline{AC} = (1;7)$. B. $B = 135^\circ$. C. $|\overline{AB}| = 20$. D. $|\overline{BC}| = 3$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A: do $\overline{AB} = (4;2)$ nên loại A

Phương án B:

Ta có $\overline{AB} = (4;2)$ suy ra $|\overline{AB}| = \sqrt{20}$, $\overline{BA} = (-4;-2)$; $\overline{BC} = (3;-1) \Rightarrow BC = \sqrt{10}$.

$$\cos B = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{-10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B = 135^\circ \text{ nên chọn B.}$$

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overline{DA} \cdot \overline{CB} = a^2$. B. $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = -a^2$.
C. $(\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} = a^2$. D. $\overline{AB} \cdot \overline{AD} + \overline{CB} \cdot \overline{CD} = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A: Do $\overline{DA} \cdot \overline{CB} = DA \cdot CB \cdot \cos 0^\circ = a^2$ nên loại A.

Phương án B: Do $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = -a^2$ nên chọn B.

Câu 15. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Câu nào sau đây **sai**?

- A. $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 8a^2$. B. $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = 0$. C. $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$. D. $\overline{DA} \cdot \overline{DB} = 0$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos 0^\circ = 8a^2$ nên loại A.

Phương án B: $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ suy ra $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = 0$ nên loại B.

Phương án C: $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ suy ra $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = 0$ nên loại C.

Phương án D: \overline{DA} không vuông góc với \overline{DB} suy ra $\overline{DA} \cdot \overline{DB} \neq 0$ nên chọn D.

Câu 16. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overline{IA} + \overline{IB}) \cdot \overline{ID}$ bằng:

A. $\frac{9a^2}{2}$.

B. $-\frac{9a^2}{2}$.

C. 0.

D. $9a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(\overline{IA} + \overline{IB}) \cdot \overline{ID} = (\overline{IA} + \overline{IA} + \overline{AB}) \cdot \overline{ID} = 2\overline{IA} \cdot \overline{ID} = -\frac{9a^2}{2}$ nên chọn B.

Câu 17. Cho tam giác đều ABC cạnh a , với các đường cao AH, BK ; vẽ $HI \perp AC$. Câu nào sau đây đúng?

A. $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 2\overline{BA} \cdot \overline{BH}$.

B. $\overline{CB} \cdot \overline{CA} = 4\overline{CB} \cdot \overline{CI}$.

C. $(\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot \overline{BC} = 2\overline{BA} \cdot \overline{BC}$.

D. Cả ba câu trên.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $\overline{BC} = 2\overline{BH} \Rightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 2\overline{BA} \cdot \overline{BH}$ nên đẳng thức ở phương án A là đúng.

Phương án B: $\overline{CA} = 4\overline{CI} \Rightarrow \overline{CB} \cdot \overline{CA} = 4\overline{CB} \cdot \overline{CI}$ nên đẳng thức ở phương án B là đúng.

Phương án C:
$$\left. \begin{aligned} (\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot \overline{BC} &= \overline{BC} \cdot \overline{BC} = a^2 \\ 2\overline{BA} \cdot \overline{BC} &= 2 \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\overline{AC} - \overline{AB}) \cdot \overline{BC} = 2\overline{BA} \cdot \overline{BC}$$
 nên đẳng thức ở

phương án C là đúng.

Vậy chọn D.

Câu 18. Cho tam giác đều ABC cạnh a , với các đường cao AH, BK ; vẽ $HI \perp AC$. Câu nào sau đây đúng?

A. $(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot \overline{BC} = a^2$. B. $\overline{CB} \cdot \overline{CK} = \frac{a^2}{8}$. C. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overline{CB} \cdot \overline{CK} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: do $(\overline{AB} + \overline{AC}) \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AC} \cdot \overline{BC} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$ nên loại A

Phương án B: do $\overline{CB} \cdot \overline{CK} = CB \cdot CK \cdot \cos 0^\circ = \frac{a^2}{2}$ nên loại B

Phương án C: do $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ nên chọn C

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$.

B. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = a^2$.

C. $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = a^2$.

D. $(\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC}) \cdot \overline{AD} = a^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta đi tính tích vô hướng ở vế trái của 4 phương án.

Phương án A: $\overline{AB} \perp \overline{AD} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$ nên loại A.

Phương án B: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a^2$ nên loại B.

Phương án C: $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = a \cdot a \cdot \cos 180^\circ = -a^2$ nên chọn C.

Câu 20. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $B = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là sai?

A. $(\overline{AB}, \overline{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overline{BC}, \overline{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overline{AB}, \overline{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overline{AC}, \overline{CB}) = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $(\overline{AB}, \overline{BC}) = 180^\circ - (\overline{AB}, \overline{CB}) = 130^\circ$ nên loại A.

Phương án B: $(\overline{BC}, \overline{AC}) = (\overline{CB}, \overline{CA}) = 40^\circ$ nên loại B.

Phương án C: $(\overline{AB}, \overline{CB}) = (\overline{BA}, \overline{BC}) = 50^\circ$ nên loại C.

Phương án D: $(\overline{AC}, \overline{CB}) = 180^\circ - (\overline{CA}, \overline{CB}) = 140^\circ$ nên chọn D.

Câu 21. Trong mặt phẳng $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cho 2 vectơ : $\vec{a} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 8\vec{i} - 4\vec{j}$. Kết luận nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $\vec{a} \perp \vec{b}$. C. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$. D. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$.

Lời giải

Chọn C

$\vec{a} = (3; 6); \vec{b} = (8; -4)$

Phương án A: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 24 - 24 = 0$ nên loại A

Phương án B: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ suy ra \vec{a} vuông góc \vec{b} nên loại B

Phương án C: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{8^2 + (-4)^2} \neq 0$ nên chọn C.

Câu 22. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1; 2), B(4; 1), C(5; 4)$. Tính $\angle BAC$?

A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 120° .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overline{AB} = (3; -1), \overline{AC} = (4; 2)$ suy ra $\cos(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\Rightarrow (\overline{AB}; \overline{AC}) = 45^\circ$.

Câu 23. Cho các vectơ $\vec{a} = (1; -3), \vec{b} = (2; 5)$. Tính tích vô hướng của $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b})$

A. 16. B. 26. C. 36. D. -16.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{a} = 10, \vec{a} \cdot \vec{b} = -13$ suy ra $\vec{a}(\vec{a} + 2\vec{b}) = -16$.

Câu 24. Cho hình vuông ABCD, tính $\cos(\overline{AB}, \overline{CA})$

A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc $(\overline{AB}, \overline{CA})$ sau đó mới tính $\cos(\overline{AB}, \overline{CA})$

Vì $(\overline{AB}, \overline{CA}) = 180^\circ - (\overline{AB}, \overline{CB}) = 135^\circ \Rightarrow \cos(\overline{AB}, \overline{CA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25. Cho hai điểm $A(-3, 2), B(4, 3)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox và có hoành độ dương để tam giác MAB vuông tại M

A. $M(7; 0)$. B. $M(5; 0)$. C. $M(3; 0)$. D. $M(9; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A(-3, 2), B(4, 3)$, gọi $M(x; 0), x > 0$. Khi đó $\overline{AM} = (x+3; -2), \overline{BM} = (x-4; -3)$.

Theo YCBT $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow M(3;0)$.

- Câu 26.** Cho $A(2;5), B(1;3), C(5;-1)$. Tìm tọa độ điểm K sao cho $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CK}$
A. $K(-4;5)$. **B.** $K(-4;5)$. **C.** $K(4;-5)$. **D.** $K(-4;-5)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $K(x; y)$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\overrightarrow{AK} = (x-2; y-5)$, $3\overrightarrow{BC} = (12; -12)$, $2\overrightarrow{CK} = (2x-10; 2y+2)$.

Theo YCBT $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CK}$ nên $\begin{cases} x-2 = 12+2x-10 \\ y-5 = -12+2y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow K(-4;5)$.

- Câu 27.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. **B.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. **C.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

- Câu 28.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
A. 0 . **B.** a . **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** a^2 .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0$.

- Câu 29.** Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; -1)$ và $\vec{b} = (-3; 4)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?
A. Tích vô hướng của hai vectơ đã cho là -10 . **B.** Độ lớn của vectơ \vec{a} là $\sqrt{5}$.
C. Độ lớn của vectơ \vec{b} là 5 . **D.** Góc giữa hai vectơ là 90° .

Lời giải

Chọn D

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ nên B đúng.

$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ nên C đúng.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 = -10 \neq 0$ nên A đúng, D sai.

- Câu 30.** Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:
A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. **B.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. **D.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên loại B.

Phương án C: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$ nên loại C.

Phương án D: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên chọn D.

- Câu 31.** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

A. $\frac{3a^2}{4}$.

B. $\frac{-3a^2}{4}$.

C. $\frac{3a^2}{2}$.

D. $\frac{-3a^2}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $\overline{AH} \cdot \overline{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos(\overline{AH}, \overline{CA}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}$.

Câu 32. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúngA. \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.B. \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .C. \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.

D. A, B, C đều sai.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$ nên \vec{a} và \vec{b} ngược hướng

Câu 33. Tính (\vec{a}, \vec{b}) biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$)A. 120° .B. 135° .C. 150° .D. 60° .**Lời giải****Chọn A**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2}$$
 nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

Câu 34. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AD = 6$ cm. Đặt $\vec{v} = \overline{AB} - \overline{DC} - \overline{CB}$. Tính $\vec{v} \cdot \overline{AD}$ A. 18 cm^2 .B. 24 cm^2 .C. 36 cm^2 .D. 48 cm^2 .**Lời giải****Chọn C**

$$\vec{v} = \overline{AB} - \overline{DC} - \overline{CB} = \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{BC} = \overline{AD}$$
 suy ra $\vec{v} \cdot \overline{AD} = AD^2 = 36 \text{ cm}^2$.

Câu 35. Cho 2 vectơ \vec{a} và \vec{b} có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$ A. $\sqrt{21}$.B. $\sqrt{61}$.

C. 21.

D. 61.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}$.

Câu 36. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = 6$ cm và đường cao AH , H ở trên cạnh BC sao cho

$$BH = 2HC$$
. Tính $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$

A. -24 cm^2 .B. 24 cm^2 .C. 18 cm^2 .D. -18 cm^2 .**Lời giải****Chọn A**

Ta có $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = (\overline{AH} + \overline{HB}) \cdot \overline{BC} = \overline{AH} \cdot \overline{BC} + \overline{HB} \cdot \overline{BC} = \overline{HB} \cdot \overline{BC} = -24 \text{ cm}^2$.

Câu 37. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-1)$. Tính $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

A. 7.

B. 5.

C. -7.

D. -5.

Lời giải**Chọn D**

Ta có $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = -5$.

Câu 38. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-1;1)$, $B(1;3)$, $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $\overline{AB} = (4;2)$, $\overline{BC} = (2;-4)$.

B. $\overline{AB} \perp \overline{BC}$.

C. Tam giác ABC vuông cân tại A .D. Tam giác ABC vuông cân tại B .

Lời giải

Chọn C

Phương án A: do $\overline{AB} = (2; 2)$ nên loại A.

Phương án B: $\overline{AB} = (2; 2), \overline{BC} = (0; -4), \overline{AB} \cdot \overline{BC} = -8$ suy ra \overline{AB} không vuông góc \overline{BC} nên loại B.

Phương án C : Ta có $\overline{AB} = (2; 2), \overline{AC} = (2; -2), \overline{BC} = (0; -4)$, suy ra $AB = AC = \sqrt{8}, \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$. Nên Tam giác ABC vuông cân tại A. Do đó chọn C.

Câu 39. Cho $\vec{a} = (1; -2), \vec{b} = (-1; -3)$. Tính (\vec{a}, \vec{b}) .

- A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.
- B. $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.
- C. $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.
- D. $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Câu 40. Cho tam giác ABC vuông tại A có $B = 60^\circ, AB = a$. Tính $\overline{AC} \cdot \overline{CB}$

- A. $3a^2$.
- B. $-3a^2$.
- C. $3a$.
- D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2$.

Câu 41. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 12$ cm. M là trung điểm AC. Tính $\overline{BM} \cdot \overline{CA}$

- A. 144 cm^2 .
- B. -144 cm^2 .
- C. 72 cm^2 .
- D. -72 cm^2 .

Lời giải

Chọn D

$\overline{BM} \cdot \overline{CA} = (\overline{BA} + \overline{AM}) \cdot \overline{CA} = \overline{BA} \cdot \overline{CA} + \overline{AM} \cdot \overline{CA} = \overline{AM} \cdot \overline{CA} = -72 \text{ cm}^2$

Câu 42. Cho tam giác ABC có đường cao BH (H ở trên cạnh AC). Câu nào sau đây đúng

- A. $\overline{BA} \cdot \overline{CA} = BH \cdot HC$.
- B. $\overline{BA} \cdot \overline{CA} = AH \cdot HC$.
- C. $\overline{BA} \cdot \overline{CA} = AH \cdot AC$.
- D. $\overline{BA} \cdot \overline{CA} = HC \cdot AC$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overline{BA} \cdot \overline{CA} = (\overline{BH} + \overline{HA}) \cdot \overline{CA} = \overline{BH} \cdot \overline{CA} + \overline{HA} \cdot \overline{CA} = \overline{HA} \cdot \overline{CA} = AH \cdot AC$ nên chọn C.

Câu 43. Cho 2 vector đơn vị \vec{a} và \vec{b} thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

- A. 7.
- B. 5.
- C. -7.
- D. -5.

Lời giải

Chọn C

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, (3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$.

Câu 44. Cho tam giác ABC . Lấy điểm M trên BC sao cho $\overline{AB} \cdot \overline{AM} - \overline{AC} \cdot \overline{AM} = 0$. Câu nào sau đây đúng

- A. M là trung điểm của BC.
- B. AM là đường phân giác của góc A.
- C. $AM \perp BC$.
- D. A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overline{AB} \cdot \overline{AM} - \overline{AC} \cdot \overline{AM} = 0 \Leftrightarrow \overline{AM} (\overline{AB} - \overline{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{CB} = 0$ nên $AM \perp BC$.

Câu 45. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overline{DA} \cdot \overline{BC}$

- A. $-9a^2$.
- B. $15a^2$.
- C. 0.
- D. $9a^2$.

